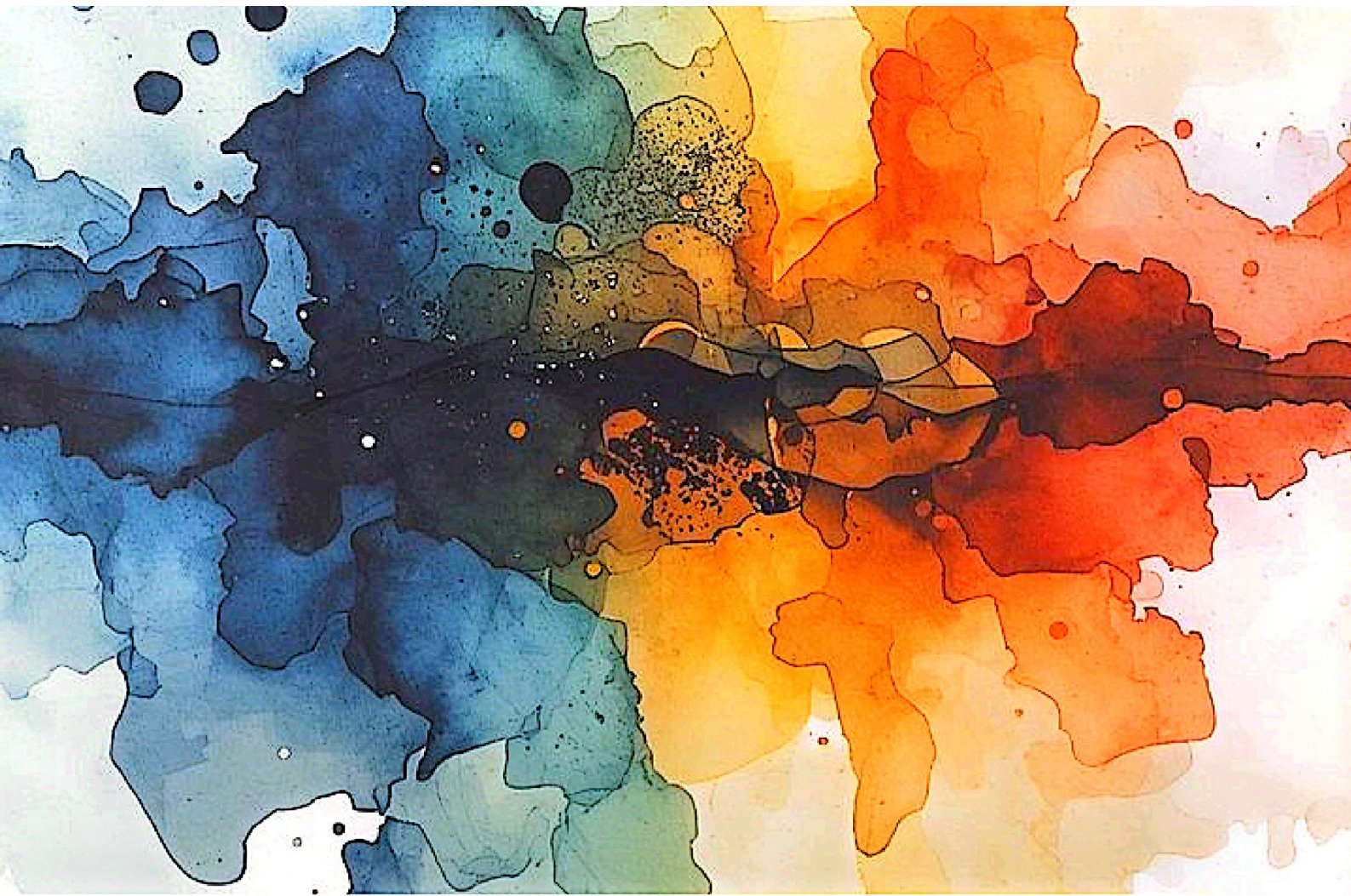




Termodinâmica

Exercícios Resolvidos



VOLUME 1

Questões Física Estatística I

2.1 : A equação de estado de um gás ideal é $PV = nRT$, onde n e R são constantes.

(a) Mostre que o coeficiente de dilatação volumétrica β é igual a $1/T$

(b) Mostre que a compressibilidade isotérmica κ é igual a $1/p$.

Solução:

$$(a) \quad \beta = \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P, n}$$

$$PV = nRT \rightarrow V = \frac{nRT}{P}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial T} \right)_{P, n} = \frac{nR}{P}$$

$$\therefore \beta = \frac{1}{\frac{nRT}{P}} \cdot \frac{nR}{P} = \frac{P}{nRT} \cdot \frac{nR}{P}$$

$$\boxed{\beta = \frac{1}{T}}$$

Resposta item (a)

2.1 (b)

$$K_T = - \frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T, n}$$

$$V = \frac{nRT}{P}$$

$$\left(\frac{\partial V}{\partial P} \right)_{T, n} = - \frac{nRT}{P^2}$$

$$K_T = - \frac{1}{\frac{nRT}{P}} \cdot \left(- \frac{nRT}{P^2} \right) = \frac{P}{nRT} \cdot \frac{nRT}{P^2}$$

$$K_T = \frac{1}{P}$$

Resposta item (b).

2.2 A equação de estado do gás de Van der Waals é dada por:

$$\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT,$$

onde a, b e R são constantes. Calcule as seguintes derivadas:

(a) $\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T$

(b) $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_v$

solução:

(a) $\left(P + \frac{a}{v^2}\right)(v-b) = RT$

$$P + \frac{a}{v^2} = \frac{RT}{v-b}$$

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = RT \left[-\frac{1}{(v-b)^2}\right] - (-2) \frac{a}{v^3}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial v}\right)_T = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{2a}{v^3}}$$

solução do item (a)

2.2 - (b)

$$P = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{v^2}$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T} \right)_v = \frac{R}{v-b}$$

Fim do item (b)

2.12 Calcule $\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_m$ e $\left(\frac{\partial m}{\partial T} \right)_H$ para um material para-magnético que obedece a seguinte equação:

$$m = \frac{C_c H}{T},$$

onde C_c é a constante de Curie.

Solução:

$$H = \frac{mT}{C_c}$$

$$\left(\frac{\partial H}{\partial T} \right)_m = \frac{m}{C_c}$$

$$m = \frac{C_c H}{T}$$

$$\left(\frac{\partial m}{\partial T} \right)_H = - \frac{C_c H}{T^2}$$

2.3 Os estados de equilíbrio do vapor superaquecido são representados pela equação de Callendar, assim:

$$v-b = \frac{\pi T}{P} - \frac{a}{T^m},$$

Onde b, π, a e m são constantes.

Calcule a expansividade volumétrica β como uma função de T e P .

Solução:

$$v-b = \frac{\pi T}{P} - \frac{a}{T^m} \quad ; \quad \beta = \frac{1}{v} \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P$$

$$v = \frac{\pi T}{P} - \frac{a}{T^m} + b$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_P = \frac{\pi}{P} + \frac{m a}{T^{m+1}}$$

Logo:

$$\beta = \left(\frac{1}{\frac{\pi T}{P} - \frac{a}{T^m} + b} \right) \left(\frac{\pi}{P} + \frac{m a}{T^{m+1}} \right)$$

(2.11) Calcule $\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P$ e $\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E$ para um

material dielétrico que obedece a seguinte equação:

$$\frac{P}{V} = \left(a + \frac{b}{T}\right) E$$

Solução:

$$E = \frac{P}{V} \cdot \frac{1}{\left(a + \frac{b}{T}\right)}$$

$$\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P = \frac{P}{V} \cdot (-T)^{-2} \cdot (-1) = \frac{P}{V \left[T \left(a + \frac{b}{T}\right)\right]^2}$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial E}{\partial T}\right)_P = \frac{P}{V (aT + b)^2}}$$

$$P = V \left(a + \frac{b}{T}\right) E$$

$$\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E = V (b(-1) T^{-2}) E$$

$$\boxed{\left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)_E = - \frac{E V b}{T^2}}$$

2.6 - Considere um fio que sofre uma mudança infinitesimal de um estado de equilíbrio inicial a um estado de equilíbrio final.

(a) Mostre que essa mudança de tensão é dada por:

$$dF = -\alpha AY dT + \frac{AY}{L} dL$$

(b) Um fio de níquel com área de seção transversal $0,0085 \text{ cm}^2$, sob uma tensão de 20 N e a uma temperatura de 20°C , está preso entre dois suportes rígidos a 1 m de distância. Se a temperatura for reduzida para 8°C , qual será a tensão final do fio?

NOTA: Assuma que α e Y permanecem constantes com os valores $1,33 \times 10^{-5} \text{ K}^{-1}$ e $2,1 \times 10^6 \text{ Pa}$, respectivamente.

Solução:

(a) $F = F(T, L)$

$$dF = \left(\frac{\partial F}{\partial T} \right)_L dT + \left(\frac{\partial F}{\partial L} \right)_T dL \quad (1)$$

Podemos definir as derivadas a partir do seguinte teorema:

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z \left(\frac{\partial y}{\partial z} \right)_x = - \left(\frac{\partial x}{\partial z} \right)_y$$

Seja:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L}\right)_T}_{\text{está associado ao módulo de Young } Y} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{\mathcal{F}}}_{\text{está associado à dilatação linear } \alpha} = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right)_L \quad (2)$$

está associado ao módulo de Young Y

está associado à dilatação linear α .

$$\alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{\mathcal{F}} \rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_{\mathcal{F}} = \alpha L$$

$$Y = \frac{L}{A} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L}\right)_T \rightarrow \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L}\right)_T = \frac{AY}{L} \quad (3)$$

Substituindo em (2),

$$\frac{AY}{L} \cdot \alpha L = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right)_L$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right)_L = -\alpha AY \quad (4)$$

Substituindo (3) e (4) em (1), obtemos, finalmente,

$$\boxed{d\mathcal{F} = -\alpha AY dT + \frac{AY}{L} dL}$$

Solução do item (a)

Seja:

$$\underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L}\right)_T}_{\text{está associado ao módulo de Young } Y} \underbrace{\left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_\mathcal{F}}_{\text{está associado à dilatação linear } \alpha} = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right)_L \quad (2)$$

está associado ao módulo de Young Y

está associado à dilatação linear α .

$$\alpha = \frac{1}{L} \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_\mathcal{F} \rightarrow \left(\frac{\partial L}{\partial T}\right)_\mathcal{F} = \alpha L$$

$$Y = \frac{L}{A} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L}\right)_T \rightarrow \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L}\right)_T = \frac{AY}{L} \quad (3)$$

Substituindo em (2),

$$\frac{AY}{L} \cdot \alpha L = -\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right)_L$$

$$\left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial T}\right)_L = -\alpha AY \quad (4)$$

Substituindo (3) e (4) em (1), obtemos, finalmente,

$$\boxed{d\mathcal{F} = -\alpha AY dT + \frac{AY}{L} dL}$$

Solução do item (a)

Solução da 2.6 - (b)

$$dF = -\alpha AY dT + \frac{AY}{L} dL$$

Como as extremidades do fio estão presas e a temperatura ~~reduziu~~ reduziu, então $dL = 0$, logo,

$$dF = -\alpha AY dT$$

$$\int_{F_0}^{F_f} dF = -\alpha AY \int_{T_0}^{T_f} dT$$

$$F_f = F_0 - \alpha AY (T_f - T_0)$$

$$F_f = 20 \text{ N} - 1,33 \cdot 10^{-5} \text{ K}^{-1} \cdot 0,0085 \text{ cm}^2 \cdot 2,1 \cdot 10^6 \text{ Pa} \cdot (8^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C})$$

$$F_f \approx 20 \text{ N} + 3,42 \text{ N}$$

$$F_f = 23,42 \text{ N}$$

solução do item (b)

2.7. A equação de estado de uma substância elástica ideal é:

$$\mathcal{F} = kT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right),$$

onde K é uma constante e L_0 (O valor de L à tensão zero) é função somente da temperatura.

(a) Mostre que o módulo de Young isotérmico é dado por:

$$Y = \frac{\mathcal{F}}{A} + \frac{3kT L_0^2}{AL^2}$$

(b) Mostre que o módulo de Young isotérmico à tensão zero é dado por:

$$Y_0 = \frac{3kT}{A}$$

(c) Mostre que a expansibilidade linear é dada por:

$$\alpha = \alpha_0 - \frac{\mathcal{F}}{AYT} = \alpha_0 - \frac{1}{T} \frac{\frac{L^3}{L_0^3} - 1}{\frac{L^3}{L_0^3} - 2},$$

onde α_0 é o valor da expansibilidade linear à tensão zero, ou.

$$\alpha_0 = \frac{1}{L_0} \frac{dL_0}{dT}$$

(d) Assuma os seguintes valores para uma amostra de borracha: $T = 300 \text{ K}$, $k = 1,333 \times 10^{-2} \text{ N/K}$, $A = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$, $\alpha_0 = 5 \times 10^{-4} \text{ K}^{-1}$. Quando essa amostra é esticada até o comprimento $L = 2L_0$, quais os valores de $\mathcal{F}$, Y e α ?

(a)

Solução do 2.º item (a)

$$Y = \frac{L}{A} \left(\frac{\partial \mathcal{F}}{\partial L} \right)_T$$

$$Y = \frac{L}{A} \left(\frac{\partial}{\partial L} \left[kT \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right) \right] \right)_T$$

$$Y = \frac{L}{A} kT \left(\frac{1}{L_0} - (-2) \frac{L_0^2}{L^3} \right)$$

$$Y = \frac{kT}{A} \left(\frac{L}{L_0} + \frac{2L_0^2}{L^2} \right) \quad \int \frac{2L_0^2}{L^2} = \frac{3L_0^2}{L^2} - \frac{L_0^2}{L^2}$$

$$Y = \frac{kT}{A} \left(\frac{L}{L_0} + \frac{3L_0^2}{L^2} - \frac{L_0^2}{L} \right)$$

$$Y = \frac{kT}{A} \left(\frac{L}{L_0} - \frac{L_0^2}{L^2} \right) + \frac{kT}{A} \left(\frac{3L_0^2}{L^2} \right)$$

$= \frac{\mathcal{F}}{kT}$

$$Y = \frac{kT}{A} \cdot \frac{\mathcal{F}}{kT} + \frac{3kT L_0^2}{A L^2}$$

$$Y = \frac{\mathcal{F}}{A} + \frac{3kT L_0^2}{A L^2}$$

Resposta do item (a)

2.7 - (b)

solução

$$Y = \frac{f}{A} + \frac{3KT L_0^2}{A L^2}$$

Como a temperatura é constante, a borracha não dilata nem contrai. Se a tensão for zero, ela não estica nem amassa, portanto:

$$L = \text{cte.}$$

$$\begin{cases} f = 0 \Rightarrow Y = Y_0 \\ f = 0 \Rightarrow L = L_0 \end{cases}$$

Logo:

$$Y_0 = \frac{(\cancel{f=0})}{A} + \frac{3KT L_0^2}{A (L=L_0)^2}$$

$$Y_0 = \frac{3KT \cancel{L_0^2}}{A \cancel{L_0^2}}$$

Portanto:

$$Y_0 = \frac{3KT}{A}$$

Resposta do item (b)

3.1.

Um recipiente metálico de paredes finas com volume V contém um gás a alta pressão. Conectado ao recipiente há um tubo capilar e uma torneira de fechamento. Quando a torneira é aberta levemente, o gás escapa lentamente para um cilindro equipado com um pistão sem vazamentos e sem atrito, onde a pressão permanece constante no valor da pressão atmosférica P_0 .

(a) Mostre que, após o máximo de gás possível ter escapado, uma quantidade de trabalho

$$W = -P_0(V_0 - V)$$

foi realizada, onde V_0 é o volume do gás na pressão e temperatura atmosféricas.

(b) Quanto trabalho seria realizado se o gás escapasse diretamente para a atmosfera?

• solução:

(a) Trabalho realizado SOBRE o gás:

$$dW = -P_0 dV$$

$$W = -P_0 \int_V^{V_0} dV$$

$$W = -P_0(V_0 - V)$$

(b) Na expansão livre não há realização de trabalho sobre o gás, logo:

$$W = 0$$

3.2

(a) Mostre que o trabalho realizado sobre um gás ideal durante uma expansão isotérmica quase-estática de uma pressão inicial P_i até uma pressão final P_f é dada por:

$$W = nRT \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)$$

(b) Calcule o trabalho realizado quando a pressão de 1 mol de um gás ideal decai quase-estaticamente de 20 atm para 1 atm. A temperatura permanece constante e é igual a 20°C . ($R = 8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol}^\circ\text{C}}$)

Solução:

(a)

$$dW = -P dV \quad (i)$$

$$PV = nRT = \text{cte}$$

$$V = \frac{nRT}{P}$$

$$\frac{dV}{dP} = -\frac{nRT}{P^2} \Rightarrow dV = -\frac{nRT}{P^2} dP$$

Substituindo em (i),

$$dW = -P \cdot \left(-\frac{nRT}{P^2}\right) dP$$

$$dW = \frac{nRT}{P} dP$$

~~W =~~

$$W = nRT \ln\left(\frac{P_f}{P_i}\right)$$

(b)

$$W = (1 \text{ mol}) \left(8,31 \frac{\text{J}}{\text{mol}^\circ\text{C}}\right) (20^\circ\text{C}) \ln\left(\frac{1 \text{ atm}}{20 \text{ atm}}\right)$$

$$W = (166,2) \ln\left(\frac{1}{20}\right)$$

$$W = (166,2) (-2,99573)$$

$$W = -497,890 \text{ J}$$

3.5 Durante uma expansão quase-estática em um recipiente adiabático, a pressão em qualquer momento é dada pela equação:

$$pV^\gamma = K,$$

onde γ e K são constantes. Mostre que o trabalho realizado ao expandir o gás de um estado (P_i, V_i) até um estado (P_f, V_f) é:

$$W = - \frac{P_i V_i - P_f V_f}{\gamma - 1}.$$

Se a pressão e volume iniciais são, respectivamente, 10^6 Pa e 10^{-3} m^3 e os finais valores são $2 \times 10^5 \text{ Pa}$ e $3,16 \times 10^{-3} \text{ m}^3$, quanto trabalho é realizado em um gás que tem $\gamma = 1,4$?

Solução:

$$pV^\gamma = K$$

$$P_i V_i^\gamma = P_f V_f^\gamma = K$$

$$dW = -p dV \rightarrow dW = -\frac{K}{V^\gamma} dV$$

$$W = -K \int_{V_i}^{V_f} \frac{1}{V^\gamma} dV \rightarrow W = -K \left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right]_{V_i}^{V_f}$$

$$W = -\frac{K \left(V_f^{-\gamma+1} - V_i^{-\gamma+1} \right)}{-\gamma+1}$$

$$W = \frac{-K (V_f^{-\gamma} V_f - V_i^{-\gamma} V_i)}{-\gamma + 1}$$

$$W = \frac{-K}{-\gamma + 1} \left[\frac{\frac{1}{P_i V_i^{-\gamma}}}{P_f} V_f - \frac{1}{V_i^{-\gamma}} V_i \right]$$

$$W = \frac{K}{\gamma - 1} \left[\frac{P_f}{P_i V_i^{-\gamma}} V_f - \frac{V_i}{V_i^{-\gamma}} \right]$$

$$W = \frac{K}{\gamma - 1} \left[\frac{P_f V_f}{P_i V_i^{-\gamma}} - \frac{P_i V_i}{P_i V_i^{-\gamma}} \right] \rightarrow W = \frac{K}{P_i V_i^{-\gamma}} \cdot \frac{1}{\gamma - 1} (P_f V_f - P_i V_i)$$

$$W = \frac{P_f V_f - P_i V_i}{\gamma - 1} \therefore W = - \frac{P_i V_i - P_f V_f}{\gamma - 1}$$

$$P_i = 10^6 \text{ Pa}$$

$$V_i = 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$P_f = 2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$$

$$V_f = 3,16 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$\gamma = 1,4$$

$$W = - \frac{(10^6 \text{ Pa})(10^{-3} \text{ m}^3) - (2 \cdot 10^5 \text{ Pa})(3,16 \cdot 10^{-3} \text{ m}^3)}{1,4 - 1}$$

$$W = - \frac{10^3 - 6,32 \cdot 10^2}{0,4}$$

$$W = - \frac{3,68 \cdot 10^2}{0,4} = - \frac{3,68}{4} \cdot 10^3 = -0,92 \cdot 10^3$$

$$W = -920 \text{ J}$$

3.13 Prove que o trabalho realizado durante uma mudança isotérmica quase-estática de estado de uma substância paramagnética que obedece a lei de Curie é dado por:

$$W = \frac{\mu_0 T}{2 C_c} (m_f^2 - m_i^2) = \frac{\mu_0 C_c}{2 T} (H_f^2 - H_i^2)$$

onde C_c é a constante de Curie.

Solução:

Para uma substância paramagnética, o trabalho é dado pela equação:

$$\delta W = \mu_0 H dm$$

Pela lei de Curie, $m = \frac{C_c H}{T}$

$$H = \frac{m T}{C_c}$$

Logo,

$$\delta W = \mu_0 \frac{m T}{C_c} dm$$

$$W = \frac{\mu_0 T}{C_c} \int_{m_i}^{m_f} m dm = \frac{\mu_0 T}{C_c} \left(\frac{m^2}{2} \right) \Big|_{m_i}^{m_f}$$

$$W = \frac{\mu_0 T}{2 C_c} (m_f^2 - m_i^2)$$

Continua ➤

(3.13) Parte 2.

$$W = \frac{\mu_0 T}{2 C_c} (m_f^2 - m_i^2)$$

$$m_f = \frac{C_c H_f}{T} \quad ; \quad m_i = \frac{C_c H_i}{T}$$

$$W = \frac{\mu_0 T}{2 C_c} \left(\frac{C_c^2 H_f^2}{T^2} - \frac{C_c^2 H_i^2}{T^2} \right)$$

$$W = \frac{\mu_0 T}{2 C_c} \cdot \frac{C_c^2}{T^2} (H_f^2 - H_i^2)$$

$$\therefore \boxed{W = \frac{\mu_0 C_c}{2 T} (H_f^2 - H_i^2)}$$

Logo,

$$\boxed{W = \frac{\mu_0 T}{2 C_c} (m_f^2 - m_i^2) = \frac{\mu_0 C_c}{2 T} (H_f^2 - H_i^2)}$$

Fim da questão 3.13.